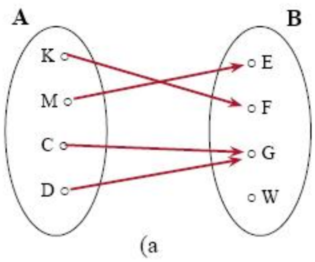
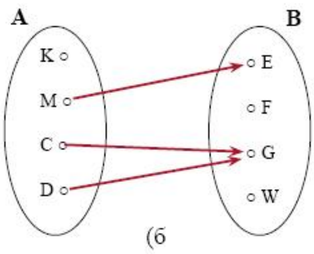
Одбрани делови од комбинаторика

1. Пресликување, инјекција, сурјекција и бијекција

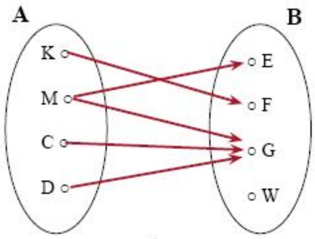
За ***f*** велиме дека е пресликување од множеството А во В, ако на секој елемент од множеството А придружиме точно еден елемент од множеството В. Што значи дека не смее да постои елемент од А на кој му немаме придружено елемент од множеството В.



(а



(б



(в

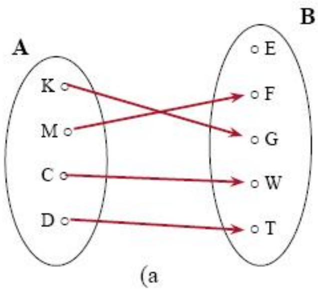
На сликата се дадени три примера. Примерот под ***а*** претставува пресликување од А во В, бидејќи на секој елемент од А му е придружен еден елемент од В, иако сите елементи од В не учествуваат во придружувањето. Во примерот под ***б***, за елементот К немаме слика односно придружен елемент од множеството В. Значи дека ова придружување на елементи не претставува пресликување. Придружувањето на елементите во примерот под ***в*** не претставува пресликување од причина што за елементот М од А не постои единствена слика т.е. единствен придружен елемент од множеството В.

Пресликувањето под ***а***, можеме да го запишеме на следниов начин: **{(K,F),(M,E),(C,G),(D,G)}** или преку *f* : ***f(K)=F; f(M)=E; f(C)=G; f(D)=G.***

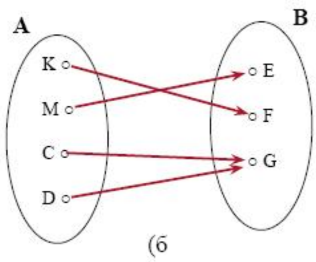
За едно пресликување ***f:A→B*** велиме дека е ***инјекција***, ако сликите на елементите од А, се различни меѓу себе. Поинаку кажано, за секој два елемента ***x*** и ***y*** од А, ако важи дека ***x ≠ y***, тогаш за нивните слики ќе важи дека ***f(x) ≠ f(y)***.

За едно пресликување ***f:A→B*** велиме дека е ***сурјекција***, ако секој елемент од множеството В учествува во барем едно придружување на елементите. Поинаку кажано, множеството В е целосно покриено со пресликувањето ***f***.

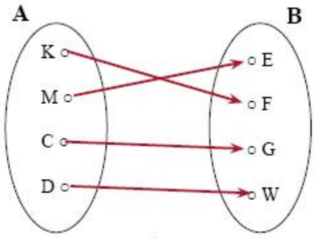
Едно пресликување е ***бијекција*** ако пресликувањето е ***инјекција*** и ***сурјекција***.



(а



(б



(в

На сликата погоре се претставени три пресликувања, од кои првото под ***а*** претставува инјекција, второто под ***б*** претставува сурјекција и третото пресликување под ***в*** претставува бијекција.

2. Варијации, Пермутации

Ваквото повторување на некои елементи од пресликувањата не беше попусто направено, бидејќи со нивна помош се разбираат поимите ***пермутација***, ***варијација без и со повторување***.

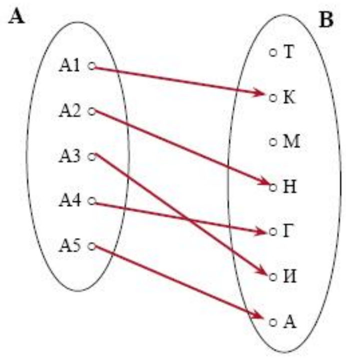
Варијација без повторување од ***n*** букви(елементи) ***k***-ти ред ($k \leq n$), претставува секој збор(подредена низа од букви) од ***k*** букви, каде секоја буква е различна. Односно, секоја варијација може да се сфати како инјекција од множество со ***k*** елементи во множество со ***n*** елементи.

Зададен е следниот пример:

$$азбука = \{т, к, м, н, г, и, а\}$$

$$збор = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = книга$$

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & к \\ a_2 & н \\ a_3 & и \\ a_4 & г \\ a_5 & а \end{pmatrix}$$



Бројот на варијации без повторување од n букви k-ти ред изнесува $\frac{n!}{(n-k)!}$. Така во претходниот пример зададовме варијација од 7 елементи 5-ти ред. Вакви варијации ги има $\frac{7!}{2!} = 7*6*5*4*3 = 2520$.

Варијации со повторување од ***n*** букви(елементи) ***k***-ти ред претставува секој збор(подредена низа од букви) од било кои ***k*** букви од зададените ***n***. Во овој случај буквите можат да се повторуваат. Па според тоа, секоја варијација со повторување од ***n*** елементи ***k***-ти ред може да се сфати како произволно пресликување од множество со ***k*** елементи во множество со ***n*** елементи.

Декартов производ од k множества $A_1, A_2, \ldots, A_k$ се запишува како $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots a_k) \mid a_i \in A_i, i = 1..k\}$. $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ како елемент од Декартовиот производ се нарекува скратено *k-торка подредени елементи*, по еден од секое множество соодветно. Ако сите овие множества $A_1, A_2, \ldots, A_k$ се еднакви и имаат ***n*** елементи, тогаш зададениот Декартов производ кој исто така е множество ќе има $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = n^k$ елементи .

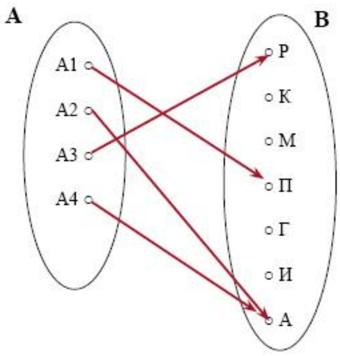
Соодветно, секој збор кој претставува варијација со повторување од ***n*** букви(елементи) ***k***-ти ред, може да се запише како подредена ***k***-торка. Па според ова бројот на варијации со повторување од ***n*** букви(елементи) ***k***-ти ред е еднаков на бројот на елементите од $|\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k}| = n^k$.

Зададен е следниов пример:

$$азбука = \{р, к, м, н, г, и, а\}$$

$$збор = a_1 a_2 a_3 a_4 = пара$$

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & п \\ a_2 & а \\ a_3 & р \\ a_4 & а \end{pmatrix}$$



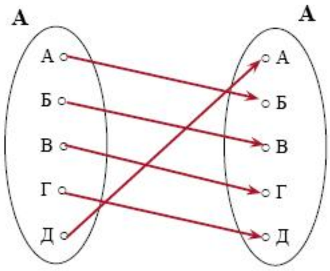
Во претходниот пример е разгледана една варијација со повторување од 7 члена азбука 4 ред. Вакви варијации со повторување ги има вкупно 7^4=2401.

Пермутација од ***n*** елементи претставува било кое подредување на истите тие ***n*** елементи. Всушност, една пермутација претставува биекција од едно ***n***-елементно множество во истото ***n***-елементно множество. Бројот на пермутации за ***n*** – елементно множество изнесува ***n!***.

Зададен е следниов пример:

$$A = \{а, б, в, г, д\}$$

$$f_{A\to A} = \begin{pmatrix} а & б \\ б & в \\ в & г \\ г & д \\ д & а \end{pmatrix}$$



3. Комбинации

Нека е дадено множество со ***n*** елементи. Секое подмножество со ***k*** елементи од дадените ***n*** елементи се нарекува ***комбинација без повторување*** од ред ***k***. Бројот на комбинации од ***n*** елементи ***k***- ти ред се запишува и пресметува на следниов начин $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$A = \{a,b,c,d\}$$

$$podmnozes\_vtor\_red = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\}, C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

4. Отсечоци

Ако поставиме вертикални црти на двата краја на една пермутација $a_1, a_2 ..., a_n$ од елементи на подредено множество со n елементи, и вертикални црти меѓу $\boldsymbol{a_j}$ и $\boldsymbol{a_{j+1}}$ за кој важи $\boldsymbol{a_j > a_{j+1}}$, тогаш секој дел помеѓу две вертикални црти се нарекува ***отсечок*** на дадената пермутација.

Пример:

Пермутацијата на цифрите 1457236098 има 4 отсечоци:

|1457|236|09|8| ○

Со $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ го означуваме бројот на пермутации од ***n*** елементи кои имаат точно точно ***k*** отсечоци, и овој број се нарекува *Ојлеров број*.

За Ојлеровите броеви важат следниве равенства:

$$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 0, \left\langle {n \atop 1} \right\rangle = 1$$

$$\left\langle {n \atop n} \right\rangle = 1, n \geq 1;$$

$$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle + \left\langle {n \atop 1} \right\rangle + ... + \left\langle {n \atop n} \right\rangle = n!$$

Теорема: Нека ***n*** и ***k*** се цели броеви т.ш. ***n≥k≥1***. Тогаш

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = k\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k+1)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$$

Доказ:

За секоја пермутација од ***n-1*** елемент можат да се добијат ***n*** нови пермутации ако земеме да го распоредиме ***n***-тиот елемент на секое од ***n***-те можни места.

Пример: Дадена е пермутацијата 12543, го додаваме бројот 6 т.ш. ги добиваме следниве шест пермутации од 6 елемента: **6**12543, 1**6**2543, 12**6**543, 125**6**43, 1254**6**3, 12543**6**.

Ако во појдовната пермутација имало ***k*** отсечоци, тогаш точно ***k*** од новодобиените n пермутации ќе имаат ***k*** отсечоци, додека останатите ***n-k*** пермутации ќе имаат ***k+1*** отсечок.

Пример: Во пермутацијата 12543 има два отсечоци. Со додавањето на 6, од новодобиените пермутации две пермутации се со по два отсечоци. Останатите се со по три отсечоци.

Равенството на теорамата ја има таа форма заради следниве причини:

- Првиот собирок $k\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle$ доаѓа како последица на претходно кажаното: на секоја пермутација од n-1 елемент со k отсечоци ако го додадеме n-тиот елемент , ќе добиеме точно n нови пермутации од n елементи од кои точно k ќе бидат повторно со k отсечоци. Па затоа го множиме бројот на пермутации од n-1 елементи со по k отсечоци секоја, со бројот k.
- Вториот собирок $(n-(k-1))\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$ доаѓа од истата причина: на секоја пермутација од n-1 елемент со k-1 отсечоци ако го додадеме n-тиот елемент , ќе добиеме точно n нови пермутации од n елементи од кои точно k-1 ќе бидат повторно со k-1 отсечоци. Додека останатите пермутации од новите n ќе бидат со по еден отсечок повеќе, а нив ги има (n-(k-1)). Па затоа го множиме бројот на пермутации од n-1 елементи со по k-1 отсечоци секоја, со бројот (n-(k-1)).

Користена литература

1. Комбинаторика – Др. Ратко Тошиќ,1999
2. Конечна математика – Др. Смиле Марковски, 1993